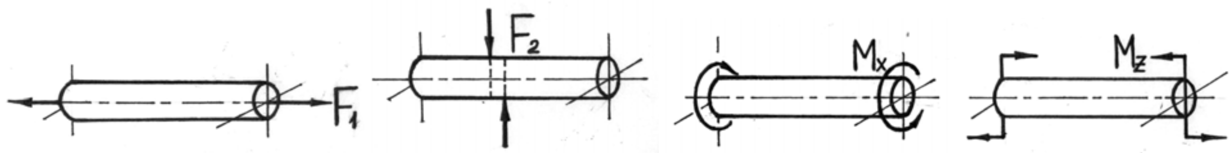
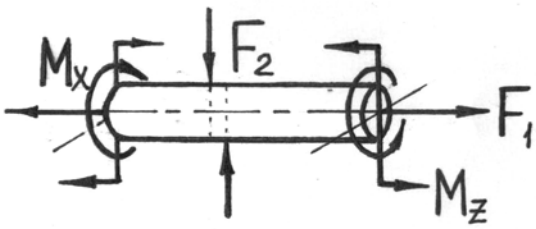
14. СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ. КОСОЙ ИЗГИБ

Рассмотренные нами до сих пор случаи нагружения элементов конструкций (растяжение-сжатие, сдвиг, кручение, плоский изгиб) относят сопротивление стержня к одному (п р о с т о м у) виду деформации. С л о ж н ы м соответствует два и более простых видов.

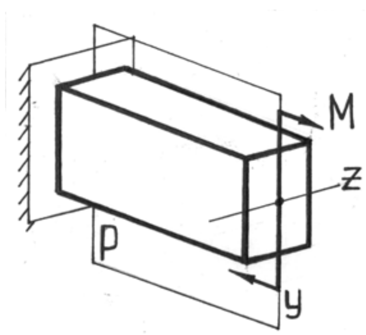


Сложное сопротивление – вид нагружения, представляющий собой комбинацию (сочетание) нескольких п р о с т ы х типов сопротивления.



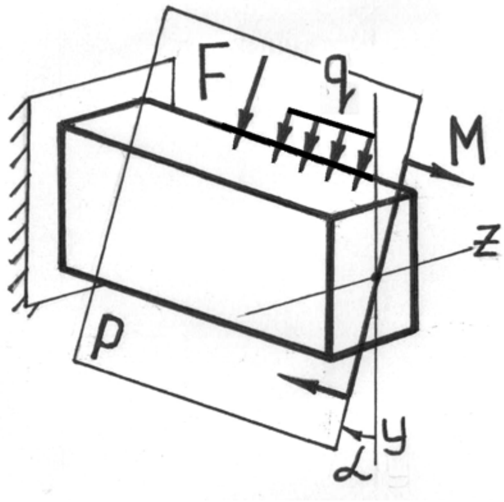
В случае сложного сопротивления в поперечных сечениях элемента возникает два и более внутренних усилия. При этом расчет элементов при сложном сопротивлении ведется в рамках п р и н ц и п а   н е з а в и с и м о с т и   д е й с т в и я   с и л. То есть, каждый из простых видов сопротивления, входящих в состав сложного, рассматривается независимо от остальных, а затем находится суперпозиция (сумма) полученных решений (для внутренних усилий, напряжений, деформаций и т. д.). Принцип суперпозиции применим только для линейно-упругих систем.

14.1. Общие понятия о косом изгибе



Прежде чем перейти к рассмотрению некоторых характерных для инженерной практики случаев сложного сопротивления и, в частности, косого изгиба, вспомним, что до этого мы анализировали частный случай изгиба, который называли п л о с к и м, – когда плоскость действия сил совпадала с одной из главных плоскостей инерции балки. Однако существуют и более общие случаи изгиба, когда силы действуют в плоскости, не совпадающей с плоскостью инерции (к о с о й изгиб), или, вообще, силы не лежат в одной плоскости (с л о ж н ы й или неплоский изгиб).

Косой изгиб – изгиб, при котором плоскость *P* действия изгибающих моментов и поперечных сил не совпадает ни с одной из главных плоскостей инерции бруса.



14.2. Определение внутренних усилий при косом изгибе

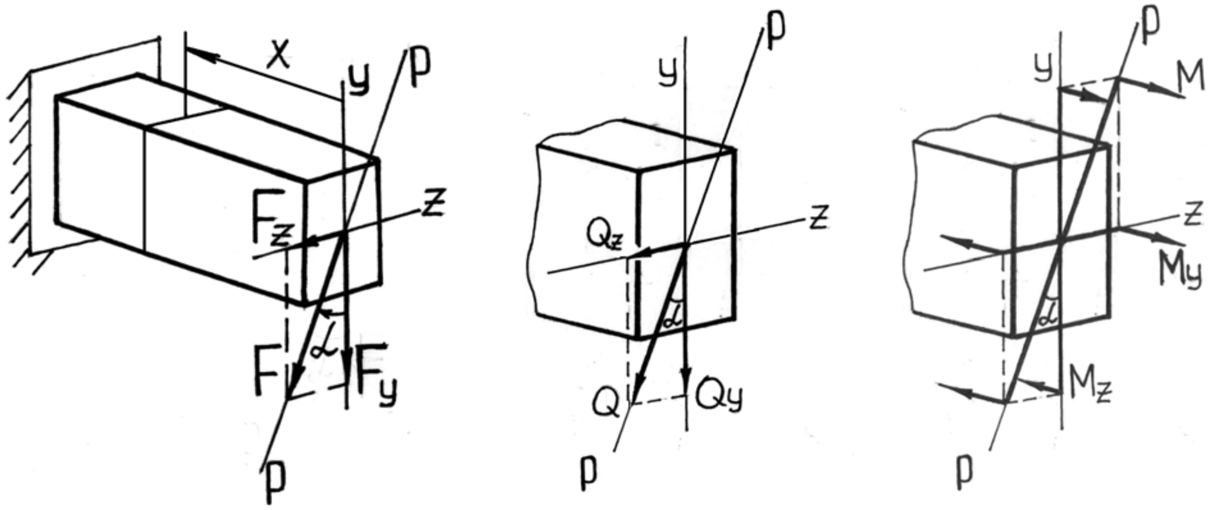
При косом изгибе в поперечных сечениях бруса действуют следующие внутренние усилия: M_z, M_y – изгибающие моменты и Q_y, Q_z – поперечные (перерезывающие) силы. Это легко показать, используя метод мысленных сечений и определяя внутренние усилия при косом изгибе консольной балки под действием сосредоточенной силы *F* на свободном конце (см. рисунок):

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow\ N = 0; \qquad \sum M_x = 0 \Rightarrow\ M_x = 0;$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow\ Q_y = F \cdot \cos\alpha; \qquad \sum M_y = 0 \Rightarrow\ M_y = F \cdot \sin\alpha \cdot x;$$

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow\ Q_z = F \cdot \sin\alpha; \qquad \sum M_z = 0 \Rightarrow\ M_z = F \cdot \cos\alpha \cdot x.$$

Аналогичные усилия возникают и в более общем случае сложного (неплоского) изгиба.



Правило знаков для внутренних усилий: изгибающие моменты – положительны, если вызывают растяжение в положительном квадранте координатной системы *zOy*; поперечные силы – положительны, если под их действием отсеченный элемент поворачивается по часовой стрелке.

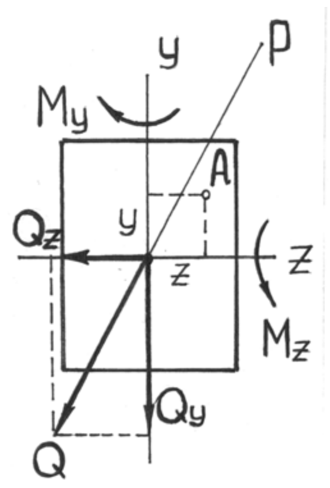
Таким образом, косой изгиб может быть представлен как совместное действие двух плоских изгибов в двух взаимно перпендикулярных плоскостях инерции.

Для определения полного изгибающего момента M и полной поперечной силы Q при косом изгибе достаточно определить внутренние усилия для каждого из плоских изгибов в отдельности (то есть Q_y, M_z и Q_z, M_y), а затем найти их векторную сумму:

$$M = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}, \qquad Q = \sqrt{Q_y^2 + Q_z^2}\,.$$

14.3. Определение напряжений при косом изгибе

Используя принцип независимости действия сил (принцип суперпозиции) найдем напряжения при косом изгибе. Рассмотрим точку A с координатами (y, z) в сечении изгибаемой балки и определим в ней напряжения от каждого из внутренних усилий, возникающих при косом изгибе:



нормальные напряжения от изгибающего момента M_z

$$\sigma' = \frac{M_z \cdot y}{J_z};$$

нормальные напряжения от изгибающего момента M_y

$$\sigma'' = \frac{M_y \cdot z}{J_y};$$

касательные напряжения от поперечной силы Q_y

$$\tau_y = \frac{Q_y \cdot S'_z}{b \cdot J_z};$$

касательные напряжения от поперечной силы Q_z

$$\tau_z = \frac{Q_z \cdot S'_y}{h \cdot J_y}.$$

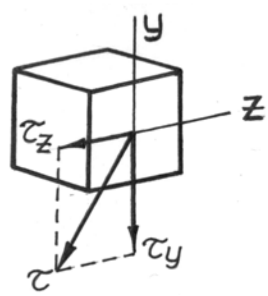
Полные напряжения τ и σ при косом изгибе найдем путем геометрического суммирования составляющих:

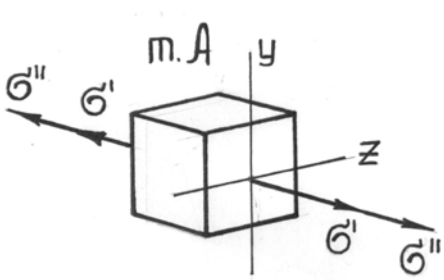
а) касательные

$$\tau = \sqrt{\tau_y^2 + \tau_z^2};$$

б) нормальные

$$\sigma = \sigma' + \sigma''.$$





Последнюю формулу удобно представить в виде

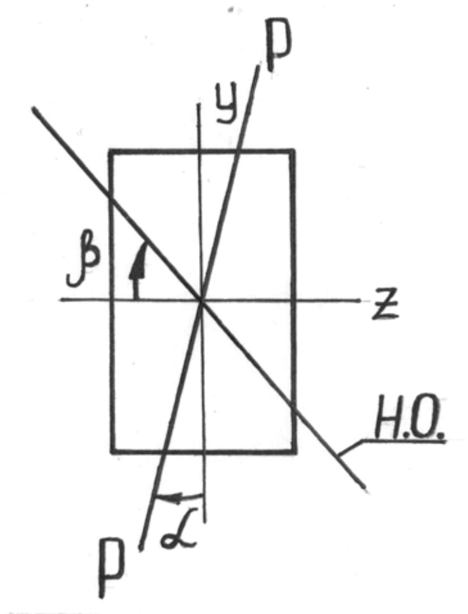
$$\sigma = \frac{M_z \cdot y}{J_z} + \frac{M_y \cdot z}{J_y}, \text{ или } \sigma = M \cdot \left(\frac{y \cdot \cos\alpha}{J_z} + \frac{z \cdot \sin\alpha}{J_y} \right), \qquad (14.1)$$

где α – угол наклона силовой плоскости P при косом изгибе (а при сложном изгибе α – угол наклона плоскости действия полного изгибающего момента M в данном сечении).

14.4. Определение положения нейтральной оси и максимальных нормальных напряжений при косом изгибе. Условие прочности

Нейтральная ось – линия, во всех точках которой нормальные напряжения равны нулю. При этом в точках сечения, наиболее удаленных от нейтральной оси нормальные напряжения принимают свои экстремальные значения – минимум и максимум.

Заметим, что при плоском изгибе нейтральная ось совпадала с одной из главных осей сечения (Oy или Oz), при косом же изгибе это не так. Выведем формулу для определения положения нейтральной оси при косом изгибе.



Так как σ=0, то можем записать $y \cdot \cos\alpha / J_z + z \cdot \sin\alpha / J_y = 0$. Отсюда найдем уравнение нейтральной оси:

$$y = -\frac{J_z}{J_y} \cdot \operatorname{tg}\alpha \cdot z.$$

Более удобно записать это уравнение через угол β наклона нейтральной линии к оси Oz:

$$\operatorname{tg}\beta = -\frac{J_z}{J_y} \cdot \operatorname{tg}\alpha.$$

Знак «минус» в этой формуле показывает, что углы α и β откладываются от разноименных осей, но в одном направлении.

Как видим, в случае, когда $J_z \neq J_y$, углы α и β не равны друг другу, а, значит, и плоскость кривизны (плоскость максимальных прогибов) бруса не будет совпадать с плоскостью действия сил. Поэтому такой изгиб и назван «косым».

Определим максимальные нормальные напряжения при косом изгибе и запишем условие прочности.

Как известно, нормальные напряжения достигают своих экстремальных значений σ_{extr} в точках, наиболее удаленных от нейтральной оси (координаты таких точек обозначим $y_{\text{уд.}}$ и $z_{\text{уд.}}$). Стало быть, можем записать:

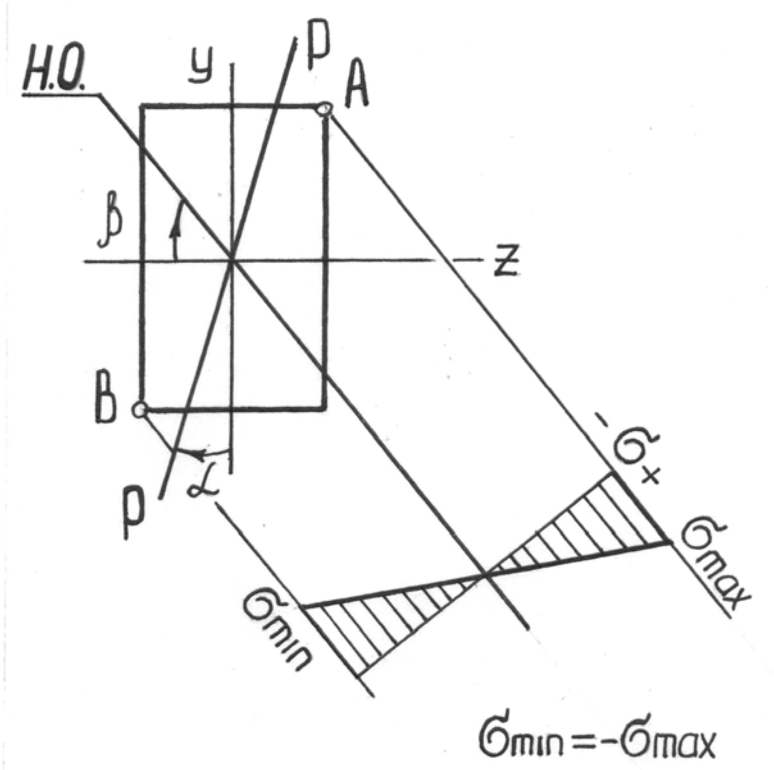
$$\sigma_{extr} = \frac{M_z \cdot y_{\text{уд.}}}{J_z} + \frac{M_y \cdot z_{\text{уд.}}}{J_y}, \quad \text{или} \quad \sigma_{extr} = M \cdot \left(\frac{y_{\text{уд.}} \cdot \cos\alpha}{J_z} + \frac{z_{\text{уд.}} \cdot \sin\alpha}{J_y} \right).$$

Для прямоугольного сечения – это точки *A* и *B*. При M>0 $\sigma_{extr,A} = \sigma_{max}$, $\sigma_{extr,B} = \sigma_{min}$ (см. рисунок).

Для материалов, одинаково сопротивляющихся растяжению (сжатию), максимальные напряжения определяются так:

$$|\sigma|_{max} = \frac{|M_z|}{W_z} + \frac{|M_y|}{W_y}, \quad \text{или} \quad |\sigma|_{max} = \frac{|M|}{W_z} \cdot \left(\cos\alpha + \frac{W_z}{W_y} \cdot \sin\alpha \right), \qquad (14.2)$$

где $W_z = J_z / |y|_{max}$ и $W_y = J_y / |z|_{max}$ – моменты сопротивления сечения относительно осей *z* и *y*.



В случае косого изгиба, как правило, проверка прочности осуществляется лишь по нормальным напряжениям (действие касательных невелико). Поэтому условие прочности запишем в виде:

$$\sigma_{max} = \frac{M}{W_z} \cdot \left(\cos\alpha + \frac{W_z}{W_y} \cdot \sin\alpha \right) \le [\sigma]. \qquad (14.3)$$

При косом изгибе (впрочем, как и при остальных видах нагружения) имеем три задачи расчета на прочность: 1) проверка прочности [проверить неравенство (14.3) – «выдержит - не выдержит»]; 2) подбор сечения [определить W_z (размеры сечения), при заданном отношении W_z/W_y]; 3) проверка по несущей способности (определить *M*).

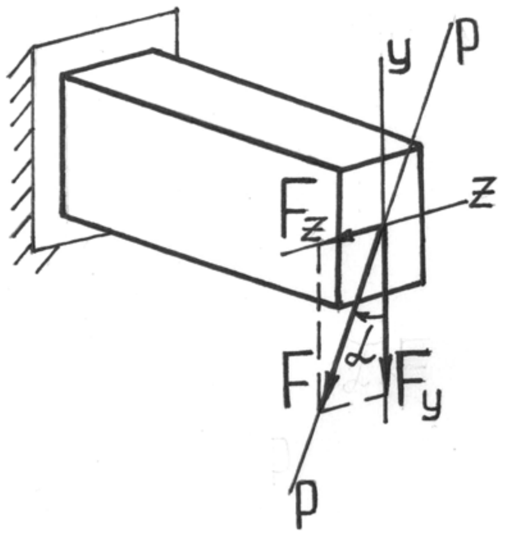
14.5. Деформации при косом изгибе

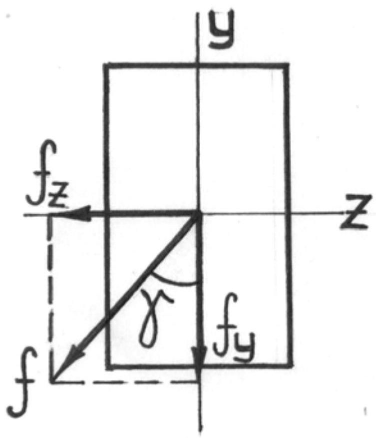
Рассматривая косой изгиб как совокупность двух плоских, полную деформацию балки можем найти, геометрически суммируя деформации балки от плоских изгибов во взаимно перпендикулярных плоскостях:

$$f = \sqrt{f_y^2 + f_z^2}\,.$$

Проанализируем косой изгиб консольной балки прямоугольного сечения. Разложим силу F, изгибающую балку, на две составляющие $F_y = F \cdot \cos\alpha$ и $F_z = F \cdot \sin\alpha$ и найдем деформации от каждой из них:

$$f_y = -\frac{F_y \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot J_z}; \qquad f_z = -\frac{F_z \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot J_y}\,.$$





Суммарная деформация

$$f = \frac{F \cdot l^3}{3 \cdot E} \cdot \sqrt{\frac{\cos^2\alpha}{J_z^2} + \frac{\sin^2\alpha}{J_y^2}}\,.$$

Определим положение плоскости, в которой происходит изгиб балки, для чего найдем величину угла γ между этой плоскостью и осью Oy:

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{f_z}{f_y} = \frac{F_z}{F_y} \cdot \frac{J_z}{J_y} = \frac{J_z}{J_y} \cdot \operatorname{tg}\alpha \Rightarrow$$

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{J_z}{J_y} \cdot \operatorname{tg}\alpha\,.$$

Как видим, плоскость прогибов не совпадает с силовой плоскостью ($\alpha \neq \gamma$ – «косой» изгиб!) и перпендикулярна нейтральной оси ($\operatorname{tg}\gamma = -\operatorname{tg}\beta$).